

5.2. DZIAŁANIA NA WIELOMIANACH

Przykład 5.2.1. Wyznacz sumę wielomianów

$$W(x) = x^3 + 4x^2 - 3 \quad \text{i} \quad P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 3$$

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) + P(x) = (x^3 + 4x^2 - 3) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 3)$	Zapisujemy sumę wielomianów.
$W(x) + P(x) = x^3 + 4x^2 - 3 + 2x^3 - 4x^2 + 2x - 3$	Opuszczamy nawiasy i wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.
$W(x) + P(x) = 3x^3 + 2x - 6$	

Przykład 5.2.2. Wyznacz różnicę wielomianów

$$W(x) = x^4 + 4x^2 - 3x \quad \text{i} \quad P(x) = 2x^4 - 2x^2 + 3x - 5$$

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) - P(x) = (x^4 + 4x^2 - 3x) - (2x^4 - 2x^2 + 3x - 5)$	Zapisujemy różnicę wielomianów.
$W(x) - P(x) = x^4 + 4x^2 - 3x - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 5$	Opuszczamy nawiasy. Pamiętajmy, że jeśli przed nawiasem jest minus to opuszczając nawias zmieniamy znaki.
$W(x) - P(x) = -x^4 + 6x^2 - 6x + 5$	Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 5.2.3. Wyznacz iloczyn wielomianów

$$W(x) = x^3 - 2x \quad \text{i} \quad P(x) = 2x^2 - 4x + 5$$

Rozwiązanie	Komentarz
$W(x) \cdot P(x) = (x^3 - 2x) \cdot (2x^2 - 4x + 5)$	Zapisujemy iloczyn wielomianów.
$W(x) \cdot P(x) =$ $= x^3 \cdot 2x^2 + x^3 \cdot (-4x) + x^3 \cdot 5 - 2x \cdot 2x^2 - 2x \cdot (-4x) - 2x \cdot 5 =$ $= 2x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^3 + 8x^2 - 10x$	Mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu.
$W(x) \cdot P(x) = 2x^5 - 4x^4 + x^3 + 8x^2 - 10x$	Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych.

Przykład 5.2.4. Wykonaj działania: $(2x^2 + x)^2 - 2(3x^3 - 4x^2 + 4x - 1)$

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{aligned} &(2x^2 + x)^2 - 2(3x^3 - 4x^2 + 4x - 1) = \\ &= (2x^2)^2 + 2 \cdot 2x^2 \cdot x + x^2 - 6x^3 + 8x^2 - 8x + 2 = \\ &= 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x^3 + 8x^2 - 8x + 2 = \end{aligned}$	<p>Usuujemy nawiasy, wykonując mnożenie.</p> <p>Do obliczenia $(2x^2 + x)^2$ stosujemy wzór skróconego mnożenia</p> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= 4x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 8x + 2$	<p>Wykonujemy redukcję wyrazów podobnych</p>

Przykład 5.2.5. Dane są wielomiany

$$W(x) = 3x - 4$$

$$P(x) = x^2 + ax + b$$

$$Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2$$

Sprawdź, czy istnieją takie wartości a i b dla których wielomian

$$V(x) = W(x) \cdot P(x) - Q(x)$$
 jest wielomianem zerowym.

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{aligned} &V(x) = W(x) \cdot P(x) - Q(x) \\ &V(x) = (3x - 4) \cdot (x^2 + ax + b) - (3x^3 + 2x^2 - 6x + 2) \\ &V(x) = 3x^3 + 3ax^2 + 3bx - 4x^2 - 4ax - 4b - 3x^3 - 2x^2 + 6x - 2 \end{aligned}$	<p>Porządkujemy wielomian $V(x)$ wykonując wskazane działania na wielomianach $W(x)$, $P(x)$, $Q(x)$.</p>
$V(x) = (3a - 2)x^2 + (3b - 4a + 6)x - 4b - 2$	<p>Porządkujemy wielomian $V(x)$</p>
$\begin{cases} 3a - 2 = 0 \\ 3b - 4a + 6 = 0 \\ -4b - 2 = 0 \end{cases}$	<p>Wielomian $V(x)$ będzie wielomianem zerowym, jeśli wszystkie jego współczynniki będą równe zero.</p> <p>Przyrównując współczynniki wielomianu $V(x)$ do zera otrzymujemy układ równań</p>
$\begin{aligned} 3a &= 2 / : 3 & -4b &= 2 / : -4 \\ a &= \frac{2}{3} & b &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$ <p>Spr.</p> $3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot \frac{2}{3} + 6 = 0$ $-\frac{3}{2} - \frac{8}{3} + 6 = 0$ $\frac{11}{6} = 0$ <p>$L \neq P$</p>	<p>Rozwiązujemy układ równań. Wyznaczamy rozwiązanie pierwszego i trzeciego równania oraz sprawdzamy, czy spełniają one drugie równanie</p>

Odp. Nie istnieją takie wartości a, b dla których wielomian $V(x)$ jest wielomianem zerowym.	Układ równań nie ma rozwiązania, ponieważ obliczone wartości a i b nie spełniają drugiego równania.
--	---

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 5.2.1. Dane są wielomiany

$$W(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$P(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$Q(x) = 3x^3 - x$$

Wykonaj działania

a) (1pkt.) $P(x) \cdot Q(x) - W(x)$

b) (1pkt.) $2W(x) + [P(x)]^2 - Q(x)$

c) (1pkt.) $[Q(x)]^3 + P(x)$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Przedstawienie wyniku w postaci uporządkowanego wielomianu.	1

Ćwiczenie 5.2.2. (2pkt.) Sprawdź, czy istnieją takie wartości a i b dla których wielomian

$$V(x) = W(x) - P(x) \cdot Q(x)$$
 jest wielomianem zerowym, gdy

$$W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

$$P(x) = x + 2$$

$$Q(x) = x^2 + ax + b$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Przedstawienie $V(x)$ w postaci uporządkowanego wielomianu.	1
2	Podanie a i b .	1

Ćwiczenie 5.2.3. (2pkt.) Wyznacz wartości a , b i c , dla których wielomiany $W(x) = (ax - 3)(x^2 + 1) + c$ i $P(x) = 5x^3 + (b - 2)x^2 + 5x + 1$ są równe.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Przedstawienie $W(x)$ w postaci uporządkowanego wielomianu.	1
2	Podanie a i b .	1